複素数 (基本問題1) 解答

1 解答のみ

1.1 次の計算をせよ。

(1). $1+2i$
(2). $-3+4i$
(3). $16+11i$
(4). i
(5). -1
(6). $-22-7\sqrt{5}i$
(7). $\frac{3-4i}{5}$
(8). $-\frac{1+3i}{2}$
(9). $\frac{4+i}{4}$
(10). $\frac{14}{5}i$

1.2 次の等式を満たす x, y を求めよ。

(1). $(x,y)=(2,1)$
(2). $(x,y)=(-10+5\sqrt{3},4)$
(3). $(x,y)=\left(\frac{14}{3},\frac{4}{3}\right)$
(4). $(x,y)=(1,-2),(3,-10)$

1.3 次の計算をせよ。

(1).$=-5\sqrt{6}$
(2).$=-6$
(3).$=\frac{3\sqrt{6}}{4i}$
(4).$=\frac{3\sqrt{2}i-3\sqrt{6}}{10}$

1.4 共益な複素数について、次の等式を証明せよ。

$\alpha=a+bi, \quad \beta=c+di$ とおいて、
問題を解きます。
解答例は、下記の「計算・証明・解答例」をご覧ください。

2 計算・証明・解答例

2.1 次の計算をせよ。

(1).$2+3i-1-i=1+2i$
(2).$(2+i)-(-3i+5)=-3+4i$
(3).$(2+5i)(3-2i)$
$=6+11i-10i^2$
$=16+11i$
(4).$i^5=i(i^2)^2=i(-1)^2=i$
(5).$i^{10}=(i^2)^5=(-1)^5=-1$
(6).$(2-\sqrt{5}i)^3$
$=2^3+3\cdot 2^2\cdot(-\sqrt{5}i)$
$+3\cdot 2\cdot(-\sqrt{5}i)^2+(-\sqrt{5}i)^3$
$=8-12\sqrt{5}i-30+5\sqrt{5}i$
$=-22-7\sqrt{5}i$
(7). $\frac{2-i}{2+i}$
$=\frac{(2-i)\times(2-i)}{(2+i)\times(2-i)}$
$=\frac{2^2-4i+i^2}{2^2-i^2}$
$=\frac{3-4i}{5}$
(8). $\frac{3-i}{2i}$
$=\frac{(3-i)\times i}{2i\times i}$
$=\frac{3i+1}{-2}=-\frac{1+3i}{2}$

(9). $\frac{1+i}{2i}-\frac{3-2i}{4i}$
$=\frac{(1+i)\times 2i}{2i\times 2i}-\frac{(3-2i)\times i}{4i\times i}$
$=\frac{2i-2}{-4}-\frac{3i+2}{-4}$
$=\frac{(2i-2)-(3i+2)}{-4}$
$=\frac{-i-4}{4}$
$=\frac{4+i}{4}$

(10). $\frac{3+2i}{2-i}-\frac{3-2i}{2+i}$
$=\frac{(3+2i)\times(2+i)}{(2-i)\times(2+i)}-\frac{(3-2i)\times(2-i)}{(2+i)\times(2-i)}$
$=\frac{6+7i+2i^2}{2^2-i^2}-\frac{6-7i+2i^2}{2^2-i^2}$
$=\frac{4+7i}{5}-\frac{4-7i}{5}$
$=\frac{14}{5}i$

2.2 次の等式を満たす x,y を求めよ。

※ 複素数の相当条件を用いる。
$a+bi=c+di \quad \leftrightarrow \quad a=c$ かつ $b=d$

(1). $(1+i)x+(2-i)y=4+i$
$(x+2y)+(x-y)i=4+i$
係数比較をして、x,y を導出します
$x+2y=4, \quad x-y=1$
$\therefore (x,y)=(2,1)$

(2). $(2+\sqrt{3})x+(2+i)y=3+4i$
$\left((2+\sqrt{3})x+2y\right)+yi=3+4i$
係数比較をして、x,y を導出します
$(2+\sqrt{3})x+2y=3, \quad y=4$
$\therefore (x,y)=(-10+5\sqrt{3},4)$

(3). $(1+i)^2x+(2-i)^2y=4+i$
$3y+(2x-4y)i=4+i$
係数比較をして、x,y を導出します
$3y=4, \quad 2x-4y=1$
$\therefore (x,y)=\left(\frac{14}{3},\frac{4}{3}\right)$

(4). $(2i+x)^2+(1+i)y=-7+2i$
$(x^2+y-4)+(4x+y)i=-5+2i$
係数比較をして、x,y を導出します
$x^2+y-4=-5, \quad 4x+y=2$
虚部の係数比較から、
$y=2-4x$ となる
これを実部の係数比較の式へ
代入した式から
x を求める
$x^2+(2-4x)-4=-5$
$\rightarrow \quad x^2-4x+3=0$
$\rightarrow \quad (x-1)(x-3)=0$
となるので、まとめると
$\therefore (x,y)=(1,-2),(3,-10)$

2.3 次の計算をせよ。

※次のように計算してはならない。
$\sqrt{-2}\times\sqrt{-6}=\sqrt{(-2)\times(-6)}$
$=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$
・$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$
とするには下記の条件があるんです。
条件：$a,b>0$
つまり、$a<0$ もしくは $b<0$ の場合
$\sqrt{a}\times\sqrt{b}\neq\sqrt{ab}$
これを注意して、解いていきましょう。

(1). $\sqrt{-5}\times\sqrt{-30}$
$=\sqrt{5}i\times\sqrt{30}i$
$=-5\sqrt{6}$

(2). $\sqrt{-4}\times\sqrt{-9}$
$=\sqrt{4}i\times\sqrt{9}i$
$=-6$

(3). $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{-8}}$
$=\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{8}i}$
$=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}i}$
$=\frac{3\sqrt{6}}{4i}$

(4). $\frac{\sqrt{-18}}{1-\sqrt{-3}}$
$=\frac{3\sqrt{2}i}{1-\sqrt{3}i}$
$=\frac{3\sqrt{2}i\times(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)\times(1+\sqrt{3}i)}$
$=\frac{3\sqrt{2}i-3\sqrt{6}}{1+9}$
$=\frac{3\sqrt{2}i-3\sqrt{6}}{10}$

2.4 共益な複素数について、次の等式を証明せよ。

$\alpha = a + bi, \quad \beta = c + di$ とおいて、
問題を解いていく。

(1).$\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \overline{((a+bi)+(c+di))} \\ &= \overline{(a+c)+(b+d)i} \\ &= (a+c)-(b+d)i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= (a-bi)+(c-di) \\ &= (a+c)-(b+d)i \end{aligned}$$

よって、左辺 = 右辺 より
与式は証明できた。

(2).$\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\overline{\beta}$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \overline{(a+bi)(c+di)} \\ &= \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} \\ &= (ac-bd)-(ad+bc)i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= (a-bi)(c-di) \\ &= (ac-bd)-(sf+bc)i \end{aligned}$$

よって、左辺 = 右辺 より
与式は証明できた。

(3).$\overline{\alpha - \beta} = \overline{\alpha} - \overline{\beta}$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \overline{(a+bi)-(c+di)} \\ &= \overline{(a-c)+(b-d)i} \\ &= (a-c)-(b-d)i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= (a-bi)-(c-di) \\ &= (a-c)-(b-d)i \end{aligned}$$

よって、左辺 = 右辺 より
与式は証明できた。

(4).$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} \quad (\beta \neq 0)$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \overline{\left(\frac{(a+bi)}{(c+di)}\right)} \\ &= \overline{\left(\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}\right)} \\ &= \overline{\left(\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}\right)} \\ &= \frac{(ac+bd)-(bc-ad)i}{c^2+d^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \frac{(a-bi)}{(c-di)} \\ &= \frac{(a-bi)(c+di)}{(c-di)(c+di)} \\ &= \frac{(ac+bd)-(bc-ad)i}{c^2+d^2} \end{aligned}$$

よって、左辺 = 右辺 より
与式は証明できた。