整数の性質 (基本問題1) 解答

1　次の数の組み合わせの最大公約数と最小公倍数を求めよ。

— 最大公約数の求め方は 3 種類 —
-1. 自力で考える。(え？辛っ...)
-2. 素因数分解。
　(見えるし分かりやすい！)
-3. ユークリッドの互除法。
　(大きい数字に対応しやすい。)
※. 解答には、最小公倍数を G、
　最大公約数を L として表す。

(1). 素因数分解をしていく

$$\begin{aligned} 12 &= 2^2 \cdot 3 \\ 8 &= 2^3 \end{aligned}$$

よって
$L = 2^2 = 4$
$G = 2^3 \cdot 3 = 24$

(2). 素因数分解をしていく

$$\begin{aligned} 66 &= 2 \cdot 3 \cdot 11 \\ 36 &= 2^2 \cdot 3^2 \end{aligned}$$

よって
$L = 2 \cdot 3 = 6$
$G = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 = 396$

(3). どちらも素数なので、
$L = 1$
$G = 2 \cdot 3 = 6$

(4). 素因数分解をしていく

$$\begin{aligned} 16 &= 2^4 \\ 24 &= 2^3 \cdot 3 \end{aligned}$$

よって
$L = 2^3 = 8$
$G = 2^4 \cdot 3 = 48$

(5). 素因数分解をしていく

$$\begin{aligned} 324 &= 2^2 \cdot 3^4 \\ 630 &= 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \end{aligned}$$

よって
$L = 2 \cdot 3^2 = 18$
$G = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = 11340$

(6). 素因数分解をしていく

$$\begin{aligned} 294 &= 2 \cdot 3 \cdot 7^2 \\ 385 &= 5 \cdot 7 \cdot 11 \end{aligned}$$

よって
$L = 7$
$G = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 = 16170$

(7). ユークリッドの互除法を用いる

$$\begin{aligned} 873 &= 1 \cdot 819 + 54 \\ 819 &= 15 \cdot 54 \cdot 9 \\ 54 &= 5 \cdot 9 \end{aligned}$$

よって
$L = 9$
$LG = 873 \times 819$

より、
$G = \frac{873\times819}{9} = 99443$

(8). ユークリッドの互除法を用いる

$$\begin{aligned} 5148 &= 2\cdot2210+728 \\ 2210 &= 3\cdot728+26 \\ 728 &= 28\cdot26 \end{aligned}$$

よって
$L = 26$
$LG = 5148\times2210$
より、
$G = \frac{5148\times2210}{26} = 437580$

(9). ユークリッドの互除法を用いる

$$\begin{aligned} 7168 &= 1\cdot3840+3328 \\ 3840 &= 1\cdot3328+512 \\ 3328 &= 6\cdot512+256 \\ 512 &= 2\cdot256 \end{aligned}$$

よって
$L = 256$
$LG = 7168\times3840$
より、
$G = \frac{7168\times3840}{256} = 107520$

(10). 明らかに 28917 は 5 と 16 の因数を持たない。71280 は 5 と 16 の因数を持っている。よって、$\frac{71280}{5\cdot16} = 891$ と 28917 との最大公約数を求めればいい。

$$\begin{aligned} 28917 &= 32\cdot891+405 \\ 891 &= 2\cdot405+81 \\ 405 &= 5\cdot81 \end{aligned}$$

よって
$L = 81$
$LG = 71280\times28917$
より、
$G = \frac{71280\times28917}{81} = 25446960$

2 倍数の見分け方の証明

(1).2 の倍数の見分け方
$2\times5 = 10$
となるので、10 の位以上の位は、
$2\times5\times n$ （n は整数)
で示せるので、下一桁のみ
2 の倍数であれば、元の整数も
2 の倍数。

(2).3 の倍数の見分け方
a, b, c を 0 以上 9 の整数とすると、
3 桁の整数を
$100a+10b+c$
と表せる。
$100a+10b+c$
$= (99a+9b)+(a+b+c)$
$(99a+9b)$ は 3 の倍数なので、
$(a+b+c)$ が 3 の倍数であれば
よい。つまり、全桁の和が 3 の
倍数であれば、元の整数も 3 の
倍数。

(3).4 の倍数の見分け方
$4\times25 = 100$
となるので、100 の位以上の位は、
$4\times25\times n$ （n は整数)
で示せるので、下二桁のみ
4 の倍数であれば、元の整数も
4 の倍数。

(4).5 の倍数の見分け方
$2\times5 = 10$
となるので、10 の位以上の位は、
$2\times5\times n$ （n は整数)
で示せるので、下一桁のみ
5 の倍数であれば、元の整数も
5 の倍数。

(5).9 の倍数の見分け方

a, b, c を 0 以上 9 の整数とすると、
3 桁の整数を
$100a + 10b + c$
と表せる。
$100a + 10b + c$
$= (99a + 9b) + (a + b + c)$
$(99a + 9b)$ は 9 の倍数なので、
$(a + b + c)$ が 9 の倍数であれば
よい。つまり、全桁の和が 9 の
倍数であれば、元の整数も 9 の
倍数。

3 次の数の約数の個数と、約数全部の和を求めよ。

(1). 2 の約数は 2 と 1 である。
約数の個数は 2 個
約数全部の和は
$2^0 + 2^1 = 3$
(2).3 の約数は 3 と 1 である。
約数の個数は 2 個
約数全部の和は
$3^0 + 3^1 = 4$
(3). 8 を素因数分解すると
$8 = 2^3$
よって、
約数の個数は $3 + 1 = 4$ 個
約数全部の和は
$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 15$
(4). 6 を素因数分解すると
$6 = 2^1 \cdot 3^1$
よって、
約数の個数は
$(1 + 1)(1 + 1) = 4$ 個
約数全部の和は
$(2^0 + 2^1)(3^0 + 3^1) = 12$
(5). 36 を素因数分解すると、
$36 = 2^2 \cdot 3^3$
よって、
約数の個数は
$(1 + 2)(1 + 2) = 9$ 個
約数全部の和は
$(2^0 + 2^1 + 2^2)(3^0 + 3^1 + 3^2) = 91$
(6). 324 を素因数分解すると
$324 = 2^2 \cdot 3^4$
よって、
約数の個数は
$(1 + 2)(1 + 4) = 15$ 個
約数全部の和は
$(2^0+2^1+2^2)(3^0+3^1+3^2+3^3+3^4)$
$= (7)(121) = 847$
(7). 252 を素因数分解すると
$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$
よって、
約数の個数は
$(1 + 2)(1 + 2)(1 + 1) = 18$ 個
約数全部の和は
$(2^0 + 2^1 + 2^2)\times$
$(3^0 + 3^1 + 3^2)(7^0 + 7^1)$
$= (7)(13)(8) = 728$
(8). 3564 を素因数分解すると、
$3564 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 11$
よって、
約数の個数は
$(1 + 2)(1 + 4)(1 + 1) = 30$ 個
約数全部の和は
$(2^0 + 2^1 + 2^2)\times$
$(3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4)(11^0 + 11^1)$
$= (7)(121)(12) = 10164$
(9). 3780 を素因数分解すると、
$3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^1$
よって、
約数の個数は
$(1 + 2)(1 + 3)(1 + 1)(1 + 1)$
$= 48$ 個
約数全部の和は
$(2^0 + 2^1 + 2^2)(3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3)\times$
$(5^0 + 5^1)(7^0 + 7^1)$
$= (7)(40)(6)(8) = 13440$
(10). 26460 を素因数分解すると、

$26460 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^2$
よって、
約数の個数は
$(1+2)(1+3)(1+1)(1+2)$
$\quad = 72$ 個
約数全部の和は
$(2^0+2^1+2^2)(3^0+3^1+3^2+3^3)\times$
$\quad (5^0+5^1)(7^0+7^1+7^2)$
$\quad = (7)(40)(6)(57) = 95760$