整数の性質 (標準問題1) 解答

1　次の式の整数解 x, y を1つ求めよ。

※解答例です。解答があるものは、無限にあります。

(1). $12x - 8y = 0$
$\to \quad 12x = 8y$
$\to \quad 2^2 \cdot 3x = 2^3 y$
両辺、最小公倍数 (24) になればよい。
よって、
$(x, y) = (2, 3)$

(2). $12x - 8y = 1$
左辺を最大公約数の 4 でまとめると、
$4(3x - 2y) = 1$
$(3x - 2y)$ は整数なので、
左辺は 4 の倍数となる。
右辺が 12 と 8 の最大公約数 (4) で割り切れないので、解なし。

(3). $12x - 8y = 4$
$(x, y) = (1, 1)$

(4). $66x + 36y = 0$
$\to 2 \cdot 3 \cdot 11x = 2^2 \cdot 3^2 y$
よって、
$(x, y) = (6, 11)$

(5). $66x + 36y = 1$
右辺が 12 と 8 の最大公約数 (6) で割り切れないので、解なし。

(6). $66x + 36y = 6$
$\to 11x + 6y = 1$
よって、
$(x, y) = (-1, 2)$

(7). $2x + 3y = 0$
$(x, y) = (3, -2)$

(8). $2x + 3y = 1$
$(x, y) = (-1, 1)$

(9). $2x + 3y = 6$
右辺が (8) の 6 倍なので、
解答も 6 倍にしたらよい。
$(x, y) = (-6, 6)$

(10). $16x + 24y = 0$
$8(2x + 3y) = 0$
(7) と同様の解となり、
$(x, y) = (3, -2)$

(11). $16x + 24y = 8$
$8(2x + 3y) = 8(1)$
(8) と同様の解となり、
$(x, y) = (-1, 1)$

(12). $324x + 630y = 0$
324 と 630 の公約数を
ユークリッドの互除法で求める。
$630 = 1 \cdot 324 + 306$
$324 = 1 \cdot 306 + 18$
$306 = 17 \cdot 18$
よって、18 でまとめると、
$18(18x + 35y) = 0$
$(x, y) = (35, -18)$

(13). $324x + 630y = 18$
(12) のユークリッドの互除法の結果を用いる。
$630 = 1 \cdot 324 + 306$
$306 = 324 - 18$
互除法の 2 式目のみ式変形した。
1 式目の 306 に式変形したものを代入。

$630=324+(324-18)$
$2\cdot 324-1\cdot 630=18$
よって、
$(x,y)=(2,-1)$

(14). $324x+630y=54$
$324x+630y=3\cdot 18$
よって、
(13) の解を 3 倍したらよいので、
$(x,y)=(6,-3)$

2　次の式の整数解 x,y を整数 k を用いて求めよ。

※前の問題は特殊解を求める解法でした。

今回は一般解を求めていきます。
こちらも解答例です。
定数の部分が異なっても
成り立っていれば大丈夫です。

(1).$12x-8y=0$
$\rightarrow\quad 4(3x-2y)=0$
よって、$3x$ は 2 を因数に
持たないといけないので、
$x=2k$
とすると、
$3x-2y=6k-2y=0$
$y=3k$
まとめると
$(x,y)=(2k,3k)$

(2). $12x-8y=1$
解なし。
理由は前の問に
記述してあります。

(3). $12x-8y=4$
特殊解は
$(x,y)=(1,1)$
なので、
$12\cdot 1-8\cdot 1=1$
与式からこの式を引くと
$12(x-1)+8(y-1)=0$
$4\{3(x-1)+2(y-1)\}=0$
よって、
$x-1=2k$
$y-1=-3k$
まとめると
$(x,y)=(2k+1,-3k+1)$

(4). $66x+36y=0$
$(x,y)=(6k,-11k)$

(5). $66x+36y=1$
解なし。

(6). $66x+36y=6$
特殊解は
$(x,y)=(-1,2)$
なので、
$66\cdot(-1)+36\cdot 2=6$
与式からこの式を引くと
$66(x+1)+36(y-2)=0$
$6\{11(x+1)+6(y-2)\}=0$
となるので、
$x+1=6k$
$y-2=-11k$
よって、
$(x,y)=(6k-1,-11k+2)$

(7). $2x+3y=0$
$(x,y)=(3k,-2k)$

(8). $2x+3y=1$
特殊解は
$(x,y)=(-1,1)$
なので、
$2(x+1)+3(y-1)=0$
この式から、
$x+1=3k$
$y-1=2k$
よって、
$(x,y)=(3k-1,2k+1)$

(9). $2x+3y=6$
特殊解は
$(x,y)=(-6,6)$
なので、
$2(x+6)+3(y-6)=0$
この式から、

$x+6=3k$
$y-6=2k$
よって、
$(x,y)=(3k-6,2k+6)$

(10). $16x+24y=0$
$8(2x+3y)=0$
よって、(7) と同じで、
$(x,y)=(3k,-2k)$

(11). $16x+24y=8$
$8(2x+3y)=8(1)$
よって、(8) と同じで、
$(x,y)=(3k-1,2k+1)$

(12). $324x+630y=0$
$18(18x+35y)=0$
となるので、
$(x,y)=(35k,-18k)$

(13). $324x+630y=18$
$18(18x+35y)=18(1)$
$18x+35y=1$
の特殊解は、
$(x,y)=(2,-1)$
となるので、
$18(x-2)+35(y+1)=0$
となるので、
$x-2=35k$
$y+1=18k$
よって、
$(x,y)=(35k+2,18k-1)$

(14). $324x+630y=54$
(13). の右辺が 3 倍になっただけなので、
$(x,y)=(35k+6,18k-3)$

3 次の問を証明してください。

(1). 連続する 2 整数は必ず、
2 の倍数が入るので、
2 つの積は 2 の倍数である。

(2). 連続する 3 整数は必ず、
2 と 3 の倍数が入るので、
3 つの積は 6 の倍数である。

(3). 連続する 4 整数は必ず、
2 と 3 と 4 の倍数が入るので、
4 つの積は 24 の倍数である。

(4). $n^2-n=n(n-1)$ は
連続する 2 整数の積は
2 の倍数でであるので、
証明できた。

(5). $n(n+1)(2n+1)$
$=n(n+1)\{(n+2)+(n-1)\}$
$=(n-1)n(n+1)+n(n+1)(n+2)$
どちらも連続する 3 整数の積であるので、どちらも 6 の倍数である。よって、6 の倍数である事を示せた。

(別解.5).$n(n+1)(2n+1)$
$=n(n+1)\{3+(2n-2)\}$
$=3n(n+1)+2(n-1)n(n+1)$
第一項目が 3 と連続する 2 整数の積、つまり、3 と 2 の倍数であるので、6 の倍数となる。
第二項目が連続する 3 整数の積なので、6 の倍数である事がわかる。よって、6 の倍数である事が示せた。

(6). $2n(n+1)(n^2+n+4)$
$=n(n+1)(2n^2+2n+8)$
$=n(n+1)\{(n^2-3n+2)$
$+(n^2+5n+6)\}$
$=n(n+1)\{(n-1)(n-2)$
$+(n+2)(n+3)\}$
$=(n-2)(n-1)n(n+1)$
$+n(n+1)(n+2)(n+3)$
連続する 4 整数の積は、24 の倍数であるので、証明できた。

(別解.6). $2n(n+1)(n^2+n+4)$
$=2n(n+1)\{6+(n^2+n-2)\}$
$=2n(n+1)\{6+(n-1)(n+2)\}$
$=12n(n+1)$
$+2(n-1)n(n+1)(n+2)$

第一項目が 12 と連続する
2 整数の積なので、24 の倍
数である。
第二項目は連続する 4 整数
の積なので、24 の倍数である。
よって、24 の倍数である事が
示せた。