# 整数の性質 (基本問題2) 解答

## 1　任意の自然数 $n$ に関して、次の問いに答えよ。

※余りを求める方法としては、
下記の二種類を用いる事が多い
-1. 合同式の利用 ($mod$)
-2. $n$ 個の連続する整数の約数
がn! である事。
特に合同式を利用した表を作成する事が多い。

(1). 自然数は 4 を法とすると、
0,1,2,3 の 4 種類しかないので、
$n$ を自然数、4 を法とすると、
下記の表になる。

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $n^2$ | 0 | 1 | 0 | 1 |

よって、$n^2$ を 4 で割ると、
0 もしくは 1 となる。

(2). 自然数は 3 を法とすると、
0,1,3 の 3 しゅるいしかないので、
$n$ を自然数、3 を法とすると、
下記の表になる。

| $n$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $n^2$ | 0 | 1 | 1 |

よって、$n^2$ を 3 で割ると、
0 もしくは 1 となる。

(3). 自然数は 2 を法とすると、
0,1 の 2 種類しかないので、
$n$ を自然数、2 を法とすると、
下記の表になる。

| $n$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $n^2$ | 0 | 1 |
| $n^2-n$ | 0 | 0 |

よって、$n^2-n$ を 2 で割ると、
割り切れることが分かる。

(別解.3). $n^2-n=n(n-1)$ となるので
連続する 2 整数の積は 2 の倍数が入るので、2 で割り切れる。

(4). 自然数は 4 を法とすると、
0,1,2,3 の 4 種類しかないので、
$n$ を自然数、4 を法とすると、
下記の表になる。

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $n^2$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $n^2-n$ | 0 | 0 | 2 | 2 |

よって、$n^2-n$ を 4 で割ると、
0 もしくは 2 となる。

(5). $n^2+2n=n(n+1)+n$
式変形した第一項目は、
連続する 2 整数なので、2 で
割り切れる。
第二項目のみを考えればいい。
$n$ は自然数なので、
余りは、0 もしくは 1

(6). 自然数は 4 を法とすると、
0,1,2,3 の 4 種類しかないので、
$n$ を自然数、4 を法とすると、
下記の表になる。

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $2n$ | 0 | 2 | 0 | 2 |
| $n^2$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $n^2+2n$ | 0 | 3 | 0 | 3 |

よって、$n^2+2n$ を 4 で割ると、
0 もしくは 3 となる。

(7). 自然数は 4 を法とすると、
0,1,2,3 の 4 種類しかないので、
$n$ を自然数、4 を法とすると、
下記の表になる。

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $n^2$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $n^2\cdot n$ | 0 | 1 | 0 | 3 |

よって、$n^3$ を 4 で割ると、
0 もしくは 3 となる。

(8). 自然数は 4 を法とすると、
0,1,2,3 の 4 種類しかないので、
$n$ を自然数、4 を法とすると、
下記の表になる。

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $n^2$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $(n^2)^12$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $n^24\cdot n$ | 0 | 1 | 0 | 3 |

よって、$n^25$ を 4 で割ると、
0 もしくは 3 となる。

## 2　次の問いに答えよ。

※解答への道筋が多くあります。
解答例ですので、参考にしてください。

(1). 自然数は 7 を法とすると、
0,1,2,3,4,5,6 の 7 種類しかないので、
$n$ を自然数、7 を法とすると、
下記の表になる。

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^2$ | 0 | 1 | 4 | 2 | 2 | 4 | 1 |
| $n\cdot n^2$ | 0 | 1 | 6 | 6 | 1 | 6 | 6 |

よって、$n^3$ を 7 で割ると、
0 もしくは 3 となる。

(2). $n^7-n$ を式変形すると、

$$\begin{aligned} n^7-n &= n(n^6-1) \\ &= n(n^3-1)(n^3+1) \\ &= n(n-1)(n+1) \\ &\quad \times(n^2+n+1)(n^2-n+1) \end{aligned}$$

-1. $n=7k$ の時
$n$ が 7 の倍数なので、割り切れる。
-2. $n=7k+1$ の時
$n-1$ が 7 の倍数なので、割り切れる。
-3. $n=7k+2$ の時
$n^2+n+1$ が 7 の倍数なので、割り切れる。
-4. $n=7k+3$ の時
$n^2-n+1$ が 7 の倍数なので、割り切れる。
-5. $n=7k+4$ の時
$n^2+n+1$ が 7 の倍数なので、割り切れる。
-6. $n=7k+5$ の時
$n^2-n+1$ が 7 の倍数なので、割り切れる。
-7. $n=7k+6$ の時
$n+1$ が 7 の倍数なので、割り切れる。
よって、$n^7-n$ は 7 で割り切れる事が
わかる。

(別解.2).$n^7$ の余りが、$n$ の余りと同じことを
示せばよい。
7 を法とする時、自然数 $n$ と $n^7$ は
下記の表になる。

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^3$ | 0 | 1 | 6 | 6 | 1 | 6 | 6 |
| $(n^3)^2$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $n^6\cdot n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

よって、$n^7-n$ は 7 で割り切れる。

(3). $n^7-n$ を式変形すると、

$$\begin{aligned} n^7-n &= n(n-1)(n+1) \\ &\quad \times(n^2+n+1)(n^2-n+1) \end{aligned}$$

よって、$(n-1)$、$n$、$(n+1)$ は連続する
する 3 整数である。その積は 6 の倍数

である。
(2) から $n^7-n$ は 7 の倍数である事が分かった。
よって、$n^7-n$ は 42 の倍数であると分かる。

## 3　次の問いに答えよ。

(1). $a$ は自然数なので、4 を法とすると、
0,1,2,3 の 4 種類しかないので、
余りは下記の表になる。

| $a$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $a^2$ | 0 | 1 | 0 | 1 |

よって、$a^2$ を 4 で割ると、
0 もしくは 1 となる。

(2). (1) から、$b$ も同様に 4 で割った時の余りは 0 か 1 となる事が分かる。
よって、$a^2+b^2$ の 4 で割った時の余りは、0 か 1 か 2 となる。

(3). 右辺は 4 で割り切れる。
よって、$a^2+b^2$ を 4 で割った時も割り切れなければならない。(余りが 0)
この時、$a$、$b$ 共に 4 で割った時の余りが 0 になればよい。
ゆえに、$a$、$b$ が共に偶数となる。

(4). $a$ は自然数なので、3 を法とすると、
0,1,2 の 3 種類しかないので、
余りは下記の表になる。

| $a$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $a^2$ | 0 | 1 | 1 |

よって、$a^2$ を 3 で割ると、
0 もしくは 1 となる。
$b^2$ も 3 で割ると、0 もしくは 1 となる。
よって、$a^2+b^2$ を 3 で割ると、余りが 0、1、2 の三種類となる。

(5). 右辺を 3 で割ると、1 余る。
よって、左辺も 3 で割れば 1 余らなければいけない。
つまり、$a^2$、$b^2$ の余りの組み合わせは、
0 と 1 の組み合わせになれば良い。
つまり、$a$、$b$ どちらか一方のみ 3 の倍数であればよい。

(6). (3) から $a$、$b$ は偶数であるから、
$(a,b)=(2n,2m) \quad (n,m\in\mathbb{N})$
と置ける。
また、(5) より一方が 3 の倍数、
もう一方が 3 の倍数でないので
$(n,m)=(3s,3t\pm1) \quad (s,t\in\mathbb{N})$
と置いても、一般性は失わない。
よって、
$(a,b)=(6s,6t\pm2)$
となり、これを与式に代入すると、
$(6s)^2+(6s\pm2)^2=100$
$\to 36s^2+36t^2\pm24t+4=100$
$\to 3s^2+t(3t\pm2)=8$
となる。
$3s^2>0$ , $t(3t\pm2)>0 \quad (\because s,t\in\mathbb{N})$
なので、
$0<3s^2<8$
となる自然数 $s$ は $s=1$ なので、
$3+t(3t\pm2)=8$
$\to t(3t\pm2)=5$
これを満たすのは、$t=1$ かつ
$\pm2$ の符号が正の時のみ
よって、求める自然数は、
$(a,b)=(6,8),(8,6)$

(別解.6.). 与式の右辺が 100 である事か r
$0<a<10$ , $0<b<10$
となる。
この範囲で偶数なのは、((3) より)
$2,4,6,8$
(5) より一方が 3 の倍数で、もう一方が 3 の倍数でないので、
3 の倍数　　　：6
3 の倍数でない：$2,4,8$
この組み合わせで 100 になるのは、
6,8 なので
$(a,b)=(6,8),(8,6)$